2026

CANPOINT®

# 高考总复习单元测评卷

命 题 新 趋 势　高 考 新 题 型

# 真题分类精练

ZHENTIFENLEIJINGLIAN

主编：肖德好

数学

Mathematics

开明出版社

# CONTENTS 目录

# 考点1　集合

**成书将部分旧高考真题替换为2025高考真题。**

1. [2024·天津卷]集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则 $A\cap B=$ (　　)

A. $\{1,2,3,4\}$　B. $\{2,3,4\}$
C. $\{2,4\}$　D. $\{1\}$

2. [2024·北京卷]已知集合 $M=\{x\mid -3<x<1\}$，$N=\{x\mid -1\leqslant x<4\}$，则 $M\cup N=$ (　　)

A. $\{x\mid -1\leqslant x<1\}$
B. $\{x\mid x>-3\}$
C. $\{x\mid -3<x<4\}$
D. $\{x\mid x<4\}$

3. [2023·全国乙卷]设全集 $U=\{0,1,2,4,6,8\}$，集合 $M=\{0,4,6\}$，$N=\{0,1,6\}$，则 $M\cup(\complement_U N)=$ (　　)

A. $\{0,2,4,6,8\}$　B. $\{0,1,4,6,8\}$
C. $\{1,2,4,6,8\}$　D. $U$

4. [2024·新课标Ⅰ卷]已知集合 $A=\{x\mid -5<x^3<5\}$，$B=\{-3,-1,0,2,3\}$，则 $A\cap B=$ (　　)

A. $\{-1,0\}$　B. $\{2,3\}$
C. $\{-3,-1,0\}$　D. $\{-1,0,2\}$

5. [2023·新课标Ⅰ卷]已知集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\{x\mid x^2-x-6\geqslant 0\}$，则 $M\cap N=$ (　　)

A. $\{-2,-1,0,1\}$　B. $\{0,1,2\}$
C. $\{-2\}$　D. $\{2\}$

6. [2022·全国乙卷]设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $M$ 满足 $\complement_U M=\{1,3\}$，则 (　　)

A. $2\in M$　B. $3\in M$
C. $4\notin M$　D. $5\notin M$

7. [2024·全国甲卷]已知集合 $A=\{1,2,3,4,5,9\}$，$B=\{x\mid \sqrt{x}\in A\}$，则 $\complement_A(A\cap B)=$ (　　)

A. $\{1,4,9\}$　B. $\{3,4,9\}$
C. $\{1,2,3\}$　D. $\{2,3,5\}$

8. [2022·全国甲卷]设全集 $U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，集合 $A=\{-1,2\}$，$B=\{x\mid x^2-4x+3=0\}$，则 $\complement_U(A\cup B)=$ (　　)

A. $\{1,3\}$　B. $\{0,3\}$
C. $\{-2,1\}$　D. $\{-2,0\}$

9. [2023·全国乙卷]设集合 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{x\mid x<1\}$，$N=\{x\mid -1<x<2\}$，则 $\{x\mid x\geqslant 2\}=$ (　　)

A. $\complement_U(M\cup N)$　B. $N\cup(\complement_U M)$
C. $\complement_U(M\cap N)$　D. $M\cup(\complement_U N)$

10. [2023·全国甲卷]设全集 $U=\mathbf{Z}$，集合 $M=\{x\mid x=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=3k+2,k\in\mathbf{Z}\}$，则 $\complement_U(M\cup N)=$ (　　)

A. $\{x\mid x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$
B. $\{x\mid x=3k-1,k\in\mathbf{Z}\}$
C. $\{x\mid x=3k-2,k\in\mathbf{Z}\}$
D. $\varnothing$

11. [2020·全国卷Ⅲ]已知集合 $A=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{N}^*,y\geqslant x\}$，$B=\{(x,y)\mid x+y=8\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为 (　　)

A. 2　B. 3
C. 4　D. 6

12. [2023·新课标Ⅱ卷]设集合 $A=\{0,-a\}$，$B=\{1,a-2,2a-2\}$，若 $A\subseteq B$，则 $a=$ (　　)

A. 2　B. 1
C. $\dfrac{2}{3}$　D. $-1$

13. [2020·全国新高考Ⅰ卷]某中学的学生积极参加体育锻炼，其中有96%的学生喜欢足球或游泳，60%的学生喜欢足球，82%的学生喜欢游泳，则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是 (　　)

A. 62%　B. 56%
C. 46%　D. 42%

14. [2020·浙江卷]设集合 $S,T$，$S\subseteq\mathbf{N}^*$，$T\subseteq\mathbf{N}^*$，$S,T$ 中至少有2个元素，且 $S,T$ 满足：

①对于任意的 $x,y\in S$，若 $x\neq y$，则 $xy\in T$；

②对于任意的 $x,y\in T$，若 $x<y$，则 $\dfrac{y}{x}\in S$. 下列命题正确的是 (　　)

A. 若 $S$ 有4个元素，则 $S\cup T$ 有7个元素
B. 若 $S$ 有4个元素，则 $S\cup T$ 有6个元素
C. 若 $S$ 有3个元素，则 $S\cup T$ 有5个元素
D. 若 $S$ 有3个元素，则 $S\cup T$ 有4个元素

# 考点2 常用逻辑用语

成书将部分旧高考真题替换为2025高考真题。

**1.** [2015·全国卷Ⅰ] 设命题 $p$:$\exists n\in\mathbf{N}, n^2>2^n$,则 $\neg p$ 为 ( )

A. $\forall n\in\mathbf{N}, n^2>2^n$

B. $\exists n\in\mathbf{N}, n^2\leqslant 2^n$

C. $\forall n\in\mathbf{N}, n^2\leqslant 2^n$

D. $\exists n\in\mathbf{N}, n^2=2^n$

**2.** [2024·天津卷] 设 $a,b\in\mathbf{R}$,则"$a^3=b^3$"是"$3^a=3^b$"的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

**3.** [2024·新课标Ⅱ卷] 已知命题 $p$:$\forall x\in\mathbf{R}$,$|x+1|>1$,命题 $q$:$\exists x>0, x^3=x$,则 ( )

A. $p$ 和 $q$ 都是真命题

B. $\neg p$ 和 $q$ 都是真命题

C. $p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

**4.** [2024·北京卷] 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是向量,则"$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$"是"$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$"的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

**5.** [2022·浙江卷] 设 $x\in\mathbf{R}$,则"$\sin x=1$"是"$\cos x=0$"的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

**6.** [2020·浙江卷] 已知空间中不过同一点的三条直线 $l,m,n$,"$l,m,n$ 共面"是"$l,m,n$ 两两相交"的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

**7.** [2023·全国甲卷] 设甲:$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$,乙:$\sin\alpha+\cos\beta=0$,则 ( )

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

**8.** [2021·北京卷] 设函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,则"$f(x)$在区间$[0,1]$上单调递增"是"$f(x)$在区间$[0,1]$上的最大值为 $f(1)$"的 ( )

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

**9.** [2019·浙江卷] 设 $a>0,b>0$,则"$a+b\leqslant 4$"是"$ab\leqslant 4$"的 ( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

**10.** [2023·新课标Ⅰ卷] 记 $S_n$ 为数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和,设甲:$\{a_n\}$为等差数列;乙:$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$为等差数列,则 ( )

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

**11.** [2020·北京卷] 已知 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$,则"存在 $k\in\mathbf{Z}$ 使得 $\alpha=k\pi+(-1)^k\beta$"是"$\sin\alpha=\sin\beta$"的 ( )

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

# 考点3　不等式

成书将部分旧高考真题替换为2025高考真题。

**1.** [2020·全国卷Ⅰ] 已知集合 $A=\{x|x^2-3x-4<0\}$, $B=\{-4,1,3,5\}$,则 $A\cap B=$ (　　)

A. $\{-4,1\}$　　B. $\{1,5\}$

C. $\{3,5\}$　　D. $\{1,3\}$

**2.** [2019·天津卷] 设 $x\in\mathbf{R}$,则"$x^2-5x<0$"是"$|x-1|<1$"的 (　　)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

**3.** [2022·上海卷] 若实数 $a,b$ 满足 $a>b>0$,则下列不等式中恒成立的是 (　　)

A. $a+b>2\sqrt{ab}$

B. $a+b<2\sqrt{ab}$

C. $\dfrac{a}{2}+2b>2\sqrt{ab}$

D. $\dfrac{a}{2}+2b<2\sqrt{ab}$

**4.** [2023·北京卷] 若 $xy\neq 0$,则"$x+y=0$"是"$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=-2$"的 (　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

**5.** [2021·全国乙卷] 下列函数中最小值为4的是 (　　)

A. $y=x^2+2x+4$

B. $y=|\sin x|+\dfrac{4}{|\sin x|}$

C. $y=2^x+2^{2-x}$

D. $y=\ln x+\dfrac{4}{\ln x}$

**6.** (多选题)[2020·全国新高考Ⅰ卷] 已知 $a>0$, $b>0$,且 $a+b=1$,则 (　　)

A. $a^2+b^2\geqslant\dfrac{1}{2}$

B. $2^{a-b}>\dfrac{1}{2}$

C. $\log_2 a+\log_2 b\geqslant -2$

D. $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$

**7.** (多选题)[2022·新高考全国Ⅱ卷] 若实数 $x,y$ 满足 $x^2+y^2-xy=1$,则 (　　)

A. $x+y<1$　　B. $x+y\geqslant -2$

C. $x^2+y^2\geqslant 1$　　D. $x^2+y^2\leqslant 2$

**8.** [2023·上海卷] 不等式 $|x-2|<1$ 的解集为________.

**9.** [2017·北京卷] 能够说明"设 $a,b,c$ 是任意实数.若 $a>b>c$,则 $a+b>c$"是假命题的一组整数 $a,b,c$ 的值依次为____________.

**10.** [2021·天津卷] 已知 $a>0$, $b>0$,则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{a}{b^2}+b$ 的最小值为________.

**11.** [2020·江苏卷] 已知 $5x^2y^2+y^4=1(x,y\in\mathbf{R})$,则 $x^2+y^2$ 的最小值是________.

# 考点4　函数的概念及其表示

成书将部分旧高考真题替换为2025高考真题。

**1.** [2016·全国卷Ⅱ] 下列函数中,其定义域和值域分别与函数 $y=10^{\lg x}$ 的定义域和值域相同的是 (　　)

A. $y=x$　　B. $y=\lg x$

C. $y=2^x$　　D. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

**2.** [2015·湖北卷] 设 $x\in\mathbf{R}$,定义符号函数 $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, x>0,\\0, x=0,\\-1, x<0,\end{cases}$ 则 (　　)

A. $|x|=x|\operatorname{sgn} x|$

B. $|x|=x\operatorname{sgn}|x|$

C. $|x|=|x|\operatorname{sgn} x$

D. $|x|=x\operatorname{sgn} x$

**3.** [2017·山东卷] 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, 0<x<1,\\2(x-1), x\geqslant 1.\end{cases}$ 若 $f(a)=f(a+1)$,则 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=$ (　　)

A. 2　　B. 4

C. 6　　D. 8

**4.** [2018·全国卷Ⅰ] 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, x\leqslant 0,\\1, x>0,\end{cases}$ 则满足 $f(x+1)<f(2x)$ 的 $x$ 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,-1]$

B. $(0,+\infty)$

C. $(-1,0)$

D. $(-\infty,0)$

**5.** [2015·浙江卷] 存在函数 $f(x)$满足:对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 (　　)

A. $f(\sin 2x)=\sin x$

B. $f(\sin 2x)=x^2+x$

C. $f(x^2+1)=|x+1|$

D. $f(x^2+2x)=|x+1|$

**6.** [2024·新课标Ⅰ卷] 已知函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$,且当 $x<3$ 时,$f(x)=x$,则下列结论中一定正确的是(　　)

A. $f(10)>100$

B. $f(20)>1000$

C. $f(10)<1000$

D. $f(20)<10\,000$

**7.** [2022·北京卷] 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-x}$ 的定义域是________.

**8.** [2023·上海卷] 已知 $f(x)=\begin{cases}2^x, x>0,\\1, x\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(x)$的值域是________.

**9.** [2021·浙江卷] 已知 $a\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4, x>2,\\|x-3|+a, x\leqslant 2.\end{cases}$ 若 $f(f(\sqrt{6}))=3$,则 $a=$________.

**10.** [2022·浙江卷] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2, x\leqslant 1,\\x+\dfrac{1}{x}-1, x>1,\end{cases}$ 则 $f\left(f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=$________;若当 $x\in[a,b]$时,$1\leqslant f(x)\leqslant 3$,则 $b-a$ 的最大值是________.

**11.** [2017·全国卷Ⅲ] 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, x\leqslant 0,\\2^x, x>0,\end{cases}$ 则满足 $f(x)+f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)>1$ 的 $x$ 的取值范围是________.

# 考点 5　函数的基本性质

成书将部分旧高考真题替换为2025高考真题。

## 考向 1　函数单调性、奇偶性、周期性的简单应用

1. [2017·全国卷Ⅱ] 函数 $f(x)=\ln(x^2-2x-8)$的单调递增区间是　(　　)

A. $(-\infty,-2)$　　B. $(-\infty,1)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(4,+\infty)$

2. [2024·天津卷] 下列函数是偶函数的是　(　　)

A. $y=\dfrac{e^x-x^2}{x^2+1}$　　B. $y=\dfrac{\cos x+x^2}{x^2+1}$

C. $y=\dfrac{e^x-x}{x+1}$　　D. $y=\dfrac{\sin x+4x}{e^{|x|}}$

3. [2022·北京卷] 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+2^x}$，则对任意实数 $x$，有　(　　)

A. $f(-x)+f(x)=0$

B. $f(-x)-f(x)=0$

C. $f(-x)+f(x)=1$

D. $f(-x)-f(x)=\dfrac{1}{3}$

4. [2021·全国乙卷] 设函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，则下列函数中为奇函数的是　(　　)

A. $f(x-1)-1$　　B. $f(x-1)+1$

C. $f(x+1)-1$　　D. $f(x+1)+1$

5. [2023·全国乙卷] 已知 $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^{ax}-1}$是偶函数，则 $a=$　(　　)

A. $-2$　　B. $-1$

C. $1$　　D. $2$

6. [2023·北京卷] 下列函数中，在区间$(0,+\infty)$上单调递增的是　(　　)

A. $f(x)=-\ln x$　　B. $f(x)=\dfrac{1}{2^x}$

C. $f(x)=-\dfrac{1}{x}$　　D. $f(x)=3^{|x-1|}$

7. [2023·新课标Ⅰ卷] 设函数 $f(x)=2^{x(x-a)}$在区间$(0,1)$单调递减，则 $a$ 的取值范围是　(　　)

A. $(-\infty,-2]$　　B. $[-2,0)$

C. $(0,2]$　　D. $[2,+\infty)$

8. [2019·全国卷Ⅱ] 设 $f(x)$为奇函数，且当$x\geqslant 0$时，$f(x)=e^x-1$，则当 $x<0$ 时，$f(x)=$(　　)

A. $e^{-x}-1$　　B. $e^{-x}+1$

C. $-e^{-x}-1$　　D. $-e^{-x}+1$

9. [2024·新课标Ⅰ卷] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-a, x<0,\\ e^x+\ln(x+1), x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 $a$ 的取值范围是　(　　)

A. $(-\infty,0]$　　B. $[-1,0]$

C. $[-1,1]$　　D. $[0,+\infty)$

10. [2021·全国甲卷] 设函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x+1)$为奇函数，$f(x+2)$为偶函数，当 $x\in[1,2]$时，$f(x)=ax^2+b$. 若 $f(0)+f(3)=6$，则 $f\left(\dfrac{9}{2}\right)=$　(　　)

A. $-\dfrac{9}{4}$　　B. $-\dfrac{3}{2}$

C. $\dfrac{7}{4}$　　D. $\dfrac{5}{2}$

11. [2021·新高考全国Ⅰ卷] 已知函数 $f(x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})$是偶函数，则 $a=$________.

12. [2022·北京卷] 设函数 $f(x)=\begin{cases}-ax+1, x<a,\\ (x-2)^2, x\geqslant a.\end{cases}$ 若 $f(x)$存在最小值，则 $a$ 的一个取值为________；$a$ 的最大值为________.

13. [2019·全国卷Ⅱ] 已知 $f(x)$是奇函数，且当 $x<0$ 时，$f(x)=-e^{ax}$. 若 $f(\ln 2)=8$，则 $a=$________.

14. [2023·全国甲卷] 若 $f(x)=(x-1)^2+ax+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$为偶函数，则 $a=$________.

15. [2018·全国卷Ⅲ] 已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1$，$f(a)=4$，则 $f(-a)=$________.

## 考向2 函数性质的综合应用

**16.** [2023·全国甲卷]已知函数 $f(x)=e^{-(x-1)^2}$，记 $a=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$b=f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$c=f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，则 (　　)

A. $b>c>a$　　B. $b>a>c$

C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

**17.** [2017·全国卷Ⅰ]函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减，且为奇函数. 若 $f(1)=-1$，则满足 $-1\leqslant f(x-2)\leqslant 1$ 的 $x$ 的取值范围是 (　　)

A. $[-2,2]$　　B. $[-1,1]$

C. $[0,4]$　　D. $[1,3]$

**18.** [2017·全国卷Ⅰ]已知函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)$，则 (　　)

A. $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递增

B. $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递减

C. $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称

D. $y=f(x)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称

**19.** [2021·新高考全国Ⅱ卷]已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x+2)$ 是偶函数，$f(2x+1)$ 是奇函数，则 (　　)

A. $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$　　B. $f(-1)=0$

C. $f(2)=0$　　D. $f(4)=0$

**20.** [2020·全国新高考Ⅰ卷]若定义在 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，且 $f(2)=0$，则满足 $xf(x-1)\geqslant 0$ 的 $x$ 的取值范围是 (　　)

A. $[-1,1]\cup[3,+\infty)$

B. $[-3,-1]\cup[0,1]$

C. $[-1,0]\cup[1,+\infty)$

D. $[-1,0]\cup[1,3]$

**21.** [2022·全国乙卷]已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)+g(2-x)=5$，$g(x)-f(x-4)=7$，若 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，$g(2)=4$，则 $\sum_{k=1}^{22}f(k)=$ (　　)

A. $-21$　　B. $-22$

C. $-23$　　D. $-24$

**22.** [2022·新高考全国Ⅱ卷]若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$，$f(1)=1$，则 $\sum_{k=1}^{22}f(k)=$ (　　)

A. $-3$　　B. $-2$　　C. 0　　D. 1

**23.** [2020·全国卷Ⅰ]若 $2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b$，则 (　　)

A. $a>2b$　　B. $a<2b$

C. $a>b^2$　　D. $a<b^2$

**24.** (多选题)[2023·新课标Ⅰ卷]已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$，则 (　　)

A. $f(0)=0$

B. $f(1)=0$

C. $f(x)$ 是偶函数

D. $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

**25.** (多选题)[2022·新高考全国Ⅰ卷]已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，记 $g(x)=f'(x)$. 若 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$，$g(2+x)$ 均为偶函数，则 (　　)

A. $f(0)=0$

B. $g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

C. $f(-1)=f(4)$

D. $g(-1)=g(2)$

**26.** [2023·北京卷]设 $a>0$，函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, x<-a,\\ \sqrt{a^2-x^2}, -a\leqslant x\leqslant a,\\ -\sqrt{x}-1, x>a.\end{cases}$ 给出下列四个结论：

①$f(x)$ 在区间 $(a-1,+\infty)$ 上单调递减；

②当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)$ 存在最大值；

③设 $M(x_1,f(x_1))(x_1\leqslant a)$，$N(x_2,f(x_2))(x_2>a)$，则 $|MN|>1$；

④设 $P(x_3,f(x_3))(x_3<-a)$，$Q(x_4,f(x_4))(x_4\geqslant -a)$，若 $|PQ|$ 存在最小值，则 $a$ 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

其中所有正确结论的序号是________.

# 考点6 幂函数、指数函数、对数函数

成书将部分旧高考真题替换为2025高考真题。

## 考向1 指、对数的运算

1. [2020·全国卷Ⅰ] 设 $a\log_3 4=2$,则 $4^{-a}=$ ( )

A. $\frac{1}{16}$ B. $\frac{1}{9}$

C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{6}$

2. [2022·浙江卷] 已知 $2^a=5$,$\log_8 3=b$,则 $4^{a-3b}=$ ( )

A. 25 B. 5

C. $\frac{25}{9}$ D. $\frac{5}{3}$

3. [2021·天津卷] 若 $2^a=5^b=10$,则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$ ( )

A. $-1$ B. $\lg 7$

C. 1 D. $\log_7 10$

4. [2022·天津卷] 化简 $(2\log_4 3+\log_8 3)(\log_3 2+\log_9 2)$ 的值为 ( )

A. 1 B. 2

C. 4 D. 6

5. [2024·北京卷] 生物丰富度指数 $d=\frac{S-1}{\ln N}$ 是河流水质的一个评价指标,其中 $S,N$ 分别表示河流中的生物种类数与生物个体总数.生物丰富度指数 $d$ 越大,水质越好.如果某河流治理前后的生物种类数 $S$ 没有变化,生物个体总数由 $N_1$ 变为 $N_2$,生物丰富度指数由 2.1 提高到 3.15,则 ( )

A. $3N_2=2N_1$ B. $2N_2=3N_1$

C. $N_2^2=N_1^3$ D. $N_2^3=N_1^2$

6. [2018·全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x)=\log_2(x^2+a)$,若 $f(3)=1$,则 $a=$________.

7. [2024·全国甲卷] 已知 $a>1$ 且 $\frac{1}{\log_8 a}-\frac{1}{\log_a 4}=-\frac{5}{2}$,则 $a=$________.

## 考向2 基本初等函数的图象与性质

8. [2019·全国卷Ⅱ] 若 $a>b$,则 ( )

A. $\ln(a-b)>0$ B. $3^a<3^b$

C. $a^3-b^3>0$ D. $|a|>|b|$

9. [2024·天津卷] 若 $a=4.2^{-0.3}$,$b=4.2^{0.3}$,$c=\log_{4.2}0.2$,则 $a,b,c$ 的大小关系为 ( )

A. $a>b>c$ B. $b>a>c$

C. $c>a>b$ D. $b>c>a$

10. [2020·全国卷Ⅱ] 设函数 $f(x)=x^3-\frac{1}{x^3}$,则 $f(x)$ ( )

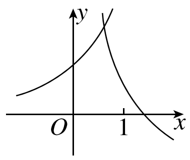
A. 是奇函数,且在 $(0,+\infty)$ 单调递增

B. 是奇函数,且在 $(0,+\infty)$ 单调递减

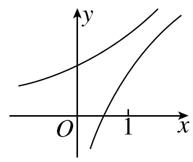
C. 是偶函数,且在 $(0,+\infty)$ 单调递增

D. 是偶函数,且在 $(0,+\infty)$ 单调递减

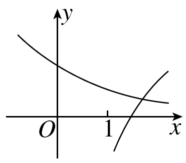
11. [2019·浙江卷]在同一直角坐标系中，函数 $y=\frac{1}{a^x}$，$y=\log_a\left(x+\frac{1}{2}\right)$（$a>0$，且 $a\neq1$）的图像可能是 （　）



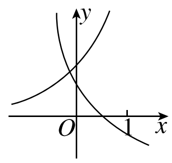

A




B




C




D

12. [2021·新高考全国Ⅱ卷]已知 $a=\log_5 2$，$b=\log_8 3$，$c=\frac{1}{2}$，则下列判断正确的是 （　）

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$

C. $b>c>a$　　D. $c>b>a$

13. [2020·北京卷]已知函数 $f(x)=2^x-x-1$，则不等式 $f(x)>0$ 的解集是 （　）

A. $(-1,1)$

B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C. $(0,1)$

D. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

14. [2024·北京卷]已知 $(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$ 是函数 $y=2^x$ 的图象上两个不同的点，则 （　）

A. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}$

B. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>\frac{x_1+x_2}{2}$

C. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<x_1+x_2$

D. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>x_1+x_2$

15. [2021·天津卷]设 $a=\log_2 0.3$，$b=\log_{\frac{1}{2}} 0.4$，$c=0.4^{0.3}$，则 $a$，$b$，$c$ 的大小关系为 （　）

A. $a<b<c$

B. $c<a<b$

C. $b<c<a$

D. $a<c<b$

16. [2020·全国卷Ⅲ]已知 $5^5<8^4$，$13^4<8^5$. 设 $a=\log_5 3$，$b=\log_8 5$，$c=\log_{13} 8$，则 （　）

A. $a<b<c$

B. $b<a<c$

C. $b<c<a$

D. $c<a<b$

17. [2020·全国卷Ⅱ]若 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$，则 （　）

A. $\ln(y-x+1)>0$

B. $\ln(y-x+1)<0$

C. $\ln|x-y|>0$

D. $\ln|x-y|<0$

18. [2021·新高考全国Ⅱ卷]写出一个同时具有下列性质①②③的函数 $f(x)$：________.

① $f(x_1x_2)=f(x_1)f(x_2)$；

②当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；

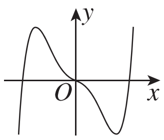
③ $f'(x)$ 是奇函数.

# 考点7　函数的图象、函数的零点及应用

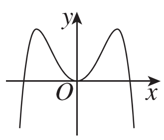
成书将部分旧高考真题替换为2025高考真题。

## 角度1　函数图象的判断

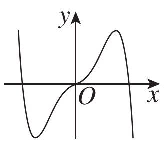
**1.** [2024·全国甲卷] 函数 $f(x)=-x^2+(e^x-e^{-x})\sin x$ 在区间 $[-2.8,2.8]$ 的图象大致为　　(　　)



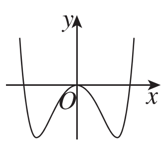
A



B

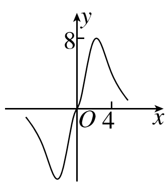


C

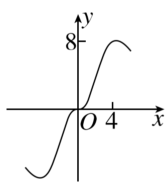


D

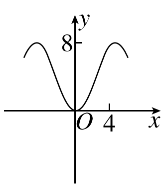
**2.** [2019·全国卷Ⅲ] 函数 $y=\dfrac{2x^3}{2^x+2^{-x}}$ 在 $[-6,6]$ 的图像大致为　　(　　)



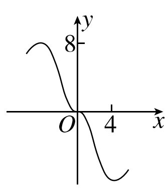
A



B

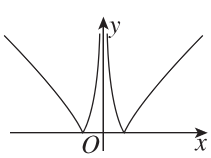


C

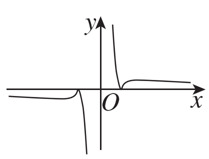


D

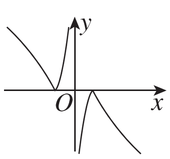
**3.** [2022·天津卷] 函数 $f(x)=\dfrac{|x^2-1|}{x}$ 的图像为　　(　　)



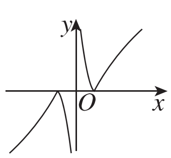
A



B

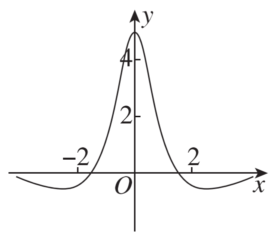


C



D

**4.** [2023·天津卷] 函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能为　　(　　)



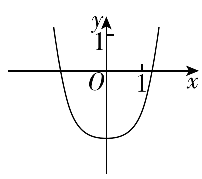
A. $f(x)=\dfrac{5(e^x-e^{-x})}{x^2+2}$

B. $f(x)=\dfrac{5\sin x}{x^2+1}$

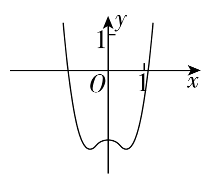
C. $f(x)=\dfrac{5(e^x+e^{-x})}{x^2+2}$

D. $f(x)=\dfrac{5\cos x}{x^2+1}$

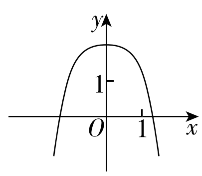
**5.** [2018·全国卷Ⅲ] 函数 $y=-x^4+x^2+2$ 的图像大致为　　(　　)



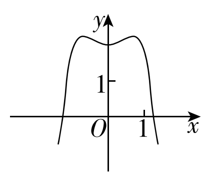
A



B

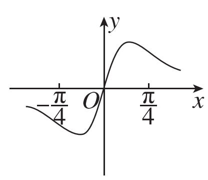


C



D

**6.** [2021·浙江卷] 已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{4}$，$g(x)=\sin x$，则图像为下图的函数可能是　　(　　)



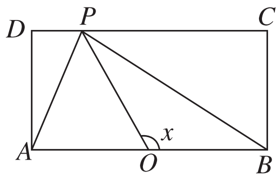
A. $y=f(x)+g(x)-\dfrac{1}{4}$

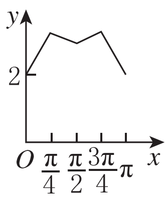
B. $y=f(x)-g(x)-\dfrac{1}{4}$

C. $y=f(x)g(x)$

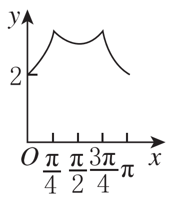
D. $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$

**7.** [2015·全国卷Ⅱ] 如图,长方形 $ABCD$ 的边 $AB=2$,$BC=1$,$O$ 是 $AB$ 的中点,点 $P$ 沿着边 $BC$,$CD$ 与 $DA$ 运动,记 $\angle BOP=x$. 将动点 $P$ 到 $A$,$B$ 两点距离之和表示为 $x$ 的函数 $f(x)$,则 $y=f(x)$的图像大致为 ( )

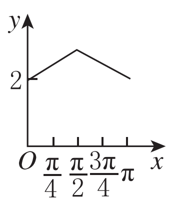


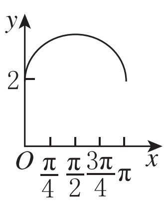

A




B




C




D

## 角度 2 函数的零点

**8.** [2019·全国卷Ⅲ] 函数 $f(x)=2\sin x-\sin 2x$ 在$[0,2\pi]$的零点个数为 ( )

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

**9.** [2018·全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, x\leqslant 0, \\ \ln x, x>0, \end{cases}$ $g(x)=f(x)+x+a$. 若 $g(x)$存在 2 个零点,则 $a$ 的取值范围是 ( )

A. $[-1,0)$

B. $[0,+\infty)$

C. $[-1,+\infty)$

D. $[1,+\infty)$

**10.** [2024·新课标Ⅱ卷] 设函数 $f(x)=a(x+1)^2-1$,$g(x)=\cos x+2ax$($a$ 为常数),当 $x\in(-1,1)$时,曲线 $y=f(x)$与 $y=g(x)$恰有一个交点,则 $a=$ ( )

A. $-1$　　B. $\frac{1}{2}$

C. 1　　D. 2

**11.** [2017·全国卷Ⅲ] 已知函数 $f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$有唯一零点,则 $a=$ ( )

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

**12.** [2024·新课标Ⅱ卷] 设函数 $f(x)=(x+a)\ln(x+b)$,若 $f(x)\geqslant 0$,则 $a^2+b^2$ 的最小值为 ( )

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

**13.** [2019·全国卷Ⅱ] 设函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,满足 $f(x+1)=2f(x)$,且当 $x\in(0,1]$时,$f(x)=x(x-1)$. 若对任意 $x\in(-\infty,m]$,都有 $f(x)\geqslant -\frac{8}{9}$,则 $m$ 的取值范围是 ( )

A. $\left(-\infty,\frac{9}{4}\right]$　　B. $\left(-\infty,\frac{7}{3}\right]$

C. $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]$　　D. $\left(-\infty,\frac{8}{3}\right]$

**14.** [2020·浙江卷] 已知 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $ab\neq 0$,对于任意 $x\geqslant 0$ 均有$(x-a)(x-b)(x-2a-b)\geqslant 0$,则 ( )

A. $a<0$　　B. $a>0$

C. $b<0$　　D. $b>0$

**15.** [2021·北京卷] 已知函数 $f(x)=|\lg x|-kx-2$,给出下列四个结论:

①若 $k=0$,则 $f(x)$恰有 2 个零点;

②存在负数 $k$,使得 $f(x)$恰有 1 个零点;

③存在负数 $k$,使得 $f(x)$恰有 3 个零点;

④存在正数 $k$,使得 $f(x)$恰有 3 个零点.

其中所有正确结论的序号是________.

**16.** [2024·天津卷] 若函数 $f(x)=2\sqrt{x^2-ax}-|ax-2|+1$ 有唯一零点,则 $a$ 的取值范围为________.

**17.** [2022·天津卷] 设 $a\in\mathbf{R}$,对于任意实数 $x$,记 $f(x)=\min\{|x|-2, x^2-ax+3a-5\}$,若 $f(x)$至少有 3 个零点,则实数 $a$ 的取值范围为________.

# 题型 1　导数解答题专练

成书将部分旧高考真题替换为2025高考真题。

**1.** [2023·新课标Ⅰ卷] 已知函数 $f(x)=a(e^x+a)-x$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性；

(2)证明：当 $a>0$ 时，$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$.

**2.** [2023·北京卷] 设函数 $f(x)=x-x^3e^{ax+b}$，曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y=-x+1$.

(1)求 $a,b$ 的值；

(2)设函数 $g(x)=f'(x)$，求 $g(x)$的单调区间；

(3)求 $f(x)$极值点的个数.

**3.** [2022·全国乙卷] 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)+axe^{-x}$.

(1)当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

(2)若 $f(x)$在区间$(-1,0)$，$(0,+\infty)$各恰有一个零点，求 $a$ 的取值范围.

4. [2024·新课标Ⅱ卷]已知函数 $f(x)=e^x-ax-a^3$.

(1)当 $a=1$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(2)若 $f(x)$ 有极小值,且极小值小于 0,求 $a$ 的取值范围.

5. [2024·北京卷]设函数 $f(x)=x+k\ln(1+x)$ $(k\neq 0)$,直线 $l$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(t,f(t))$ $(t>0)$ 处的切线.

(1)当 $k=-1$ 时,求 $f(x)$ 的单调区间.

(2)求证:$l$ 不经过点 $(0,0)$.

(3)当 $k=1$ 时,设点 $A(t,f(t))(t>0)$,$C(0,f(t))$,$O(0,0)$,$B$ 为 $l$ 与 $y$ 轴的交点,$S_{\triangle ACO}$ 与 $S_{\triangle ABO}$ 分别表示△$ACO$ 与△$ABO$ 的面积.是否存在点 $A$ 使得 $2S_{\triangle ACO}=15S_{\triangle ABO}$ 成立?若存在,这样的点 $A$ 有几个?

(参考数据:$1.09<\ln 3<1.10$,$1.60<\ln 5<1.61$,$1.94<\ln 7<1.95$)

6. [2023·新课标Ⅱ卷](1)证明:当 $0<x<1$ 时,$x-x^2<\sin x<x$;

(2)已知函数 $f(x)=\cos ax-\ln(1-x^2)$,若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点,求 $a$ 的取值范围.

7. ［2022·新高考全国Ⅰ卷］已知函数 $f(x)=e^x-ax$ 和 $g(x)=ax-\ln x$ 有相同的最小值.

(1)求 $a$；

(2)证明：存在直线 $y=b$，其与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

8. ［2024·新课标Ⅰ卷］已知函数 $f(x)=\ln\frac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$.

(1)若 $b=0$，且 $f'(x)\geqslant 0$，求 $a$ 的最小值；

(2)证明：曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形；

(3)当 $1<x<2$ 时，$f(x)$ 的取值范围是 $(-2,+\infty)$，求 $b$ 的取值范围.

9. ［2022·新高考全国Ⅱ卷］已知函数 $f(x)=xe^{ax}-e^x$.

(1)当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)当 $x>0$ 时，$f(x)<-1$，求实数 $a$ 的取值范围；

(3)设 $n\in\mathbf{N}^*$，证明：$\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln(n+1)$.

**10.** [2022·全国甲卷]已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}-\ln x+x-a$.

(1)若 $f(x)\geqslant 0$,求 $a$ 的取值范围;

(2)证明:若 $f(x)$有两个零点 $x_1,x_2$,则 $x_1x_2<1$.

**11.** [2021·新高考全国Ⅰ卷]已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性;

(2)设 $a,b$ 为两个不相等的正数,且 $b\ln a-a\ln b=a-b$,证明:$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$.